MAI 1 - 9. cvičení

Další užití derivace funkce, Taylorův polynom.

I. Aplikace derivace v bodě - rovnice tečny ke grafu funkce a lineární aproximace funkce:

1. Napište rovnici tečny ke grafu funkce $y=f(x)$ v bodě $(x_0, f(x_0))$, když
   a) $f(x)=\sin x$ a $f(x)=\arcsin x$, $x_0=0$;
   b) $f(x)=\ln x$, $x_0=1$.

2. Ukažte, že pro „malá" x je
   a) $\sin x \cong x$; $tg\, x \cong x$; $\arcsin x \cong x$; $arctg\, x \cong x$;
   b) $\sqrt{x+1} \cong 1+\frac{1}{2}x$; $\sqrt[n]{1+x} \cong 1+\frac{1}{n}x$, $n \in N$;
   c) $\ln(x+1) \cong x$; $e^x \cong 1+x$;
   d) $arctg\left(\frac{x+1}{x-1}\right) \cong -\frac{\pi}{4}-x$; $\ln(1+\sin(4x)) \cong 4x$.

3. Vypočítejte přibližně užitím lineární aproximace (a porovnejte s hodnotami, které „dává" kalkulačka):

   $\sqrt[3]{e}$; $\arcsin(0{,}2)$; $(1{,}04)^3$; $\sqrt{1{,}06}$; $\sqrt[10]{1{,}3}$; $\ln(1{,}02)$.

4. Vypočítejte přírůstek objemu, resp. povrchu koule, změníme-li její poloměr R na $R+\Delta R$ a porovnejte je s lineární aproximací přírůstků .

II. Ukažte, že platí nerovnosti (užití monotonie funkce a nalezení extrémů)

1. $e^x \geq 1+x$, $x \in R$;
2. $\ln x \leq x-1$, $x \in (0,\infty)$;
3. $x-\frac{x^3}{6} < \sin x < x$, $x \in (0,\infty)$;
4. $x-\frac{x^2}{2} < \ln(x+1) < x$, $x \in (0,\infty)$.

III. Užití Lagrangeovy věty o střední hodnotě funkce :

1. Ukažte, že pro všechna $x, y \in R$ platí nerovnosti
   (i) $|\sin x - \sin y| \leq |x-y|$;
   (ii) $|arctg\, x - arctg\, y| \leq |x-y|$ pro všechna $x, y \in R$.
   Zkuste zobecnit.

2. Spočítejte : (i) $\lim\limits_{x\to\infty}(e^{\sqrt{x+1}}-e^{\sqrt{x}})$; (ii) $\lim\limits_{x\to\infty}(\sin\sqrt{x+1}-\sin\sqrt{x})$.

3) Je-li $f'(x)=g'(x)$ ($f'(x) \in R$, $g'(x) \in R$) pro $x \in (a,b)$, co lze říci o funkcích $f(x)$ a $g(x)$ na intervalu (a,b)?

IV. Taylorův polynom.

1. a) Najděte Taylorův polynom stupně n $(n \geq 3)$ v bodě $a = 0$ pro funkce $\exp x$, $\sin x$, $\cos x$, $\ln(x+1)$, $\sqrt{1+x}$;

   b) Najděte Taylorův polynom stupně $n = 3$ v bodě $a = 0$ pro funkci $arctg\, x$;

   c) Najděte Taylorův polynom druhého stupně v bodě $a = 0$ pro funkce
   $f(x) = \ln(1 + \sin 2x)$ a $f(x) = \sqrt{1 + 3e^{-x}}$.

2. Užitím Taylorova polynomu spočítejte limity :

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x - x}{x^3} \; ; \qquad \lim_{x \to 0} \frac{\cos x - \exp(-\frac{x^2}{2})}{x^4} \; ; \qquad \lim_{x \to 0} \frac{e^x \sin x - x(x+1)}{x^3} \; ;$$

$$\lim_{x \to \infty} (x - x^2 \ln(1 + \frac{1}{x})) \, .$$

3. Odhadněte chybu v následujících aproximacích:

   a) $\exp(x) \cong 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \ldots\ldots + \frac{x^n}{n!}$ pro $0 \leq x \leq 1$;

   b) $\sin x \cong x - \frac{x^3}{3!}$ pro $|x| \leq \frac{1}{2}$.

4. a) S pomocí Taylorova polynomu spočítejte přibližně (a pokuste se odhadnout chybu):
   $\sqrt{0{,}98}$; $arctg\,(0{,}8)$ apod. ;

   b) Je-li $f(x) = x^{10} - 3x^6 + x^2 + 2$, spočítejte přibližně $f(1{,}03)$, $f(1{,}001)$.